Chapitre 3 - Écritures fractionnaires

I. Rappels

1. Égalité de quotients.

Propriété : **Le quotient de deux nombres reste inchangé** si on multiplie (ou si on divise) ces deux nombres par un même nombre non nul.

Si $b \neq 0$ et $k \neq 0$, alors $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$.

Exemples :

$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$; $\frac{12}{8} = \frac{12:4}{8:4} = \frac{3}{2}$; $\frac{-2}{-3} = \frac{-2 \times (-1)}{-3 \times (-1)} = \frac{2}{3}$; $\frac{-5}{2} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$

Remarque : Cette règle est souvent utilisée pour mettre deux quotients au même dénominateur.

Définition :

- **Simplifier une fraction** c'est écrire une fraction qui a même valeur mais dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers plus petits.
- Lorsqu'on ne peut pas simplifier une fraction, on dit que c'est une **fraction irréductible**.

Exemples :

- $\frac{42}{56} = \frac{21 \times 2}{28 \times 2} = \frac{21}{28} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{3}{4}$. On a simplifié par 2 puis par 7.
- $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$ et $\frac{1}{2}$ sont des fractions irréductibles.

EXERCICES n° 5 p 33

2. Comparaison de nombres en écriture fractionnaire.

Comparaison avec le nombre 1 :

Propriété :

- Si le numérateur d'un nombre en écriture fractionnaire est supérieur à son dénominateur, alors ce nombre est supérieur à 1.
- Si le numérateur d'un nombre en écriture fractionnaire est inférieur à son dénominateur, alors ce nombre est inférieur à 1.

Remarque : Si le numérateur d'un nombre en écriture fractionnaire est égal à son dénominateur, alors ce nombre est égal à 1.

Exemples : • $\frac{131}{132} < 1$; • $\frac{325}{324} > 1$; • $\frac{2007}{2007} = 1$; • $\frac{24,25}{25,24} < 1$

Comparaison de fractions ayant le même dénominateur :
Propriété : Deux fractions ayant le même dénominateur sont rangées dans l'ordre de leurs numérateurs.

Exemple : $287 < 288$, donc $\frac{287}{96} < \frac{288}{96}$.

Comparaison de fractions ayant le même numérateur :
Propriété : Deux fractions ayant le même numérateur sont rangées dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs.

Exemple : $327 < 328$, donc $\frac{37}{328} < \frac{37}{327}$.

Synthèse des méthodes :
Pour comparer des nombres en écriture fractionnaire, le plus souvent, on les écrit avec le même dénominateur puis on les range dans le même ordre que leurs numérateurs.

Exemple : Compare les nombres $\frac{1,2}{4}$ et $\frac{5,7}{20}$.

$\frac{1,2}{4} = \frac{1,2 \times 5}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$ ⟶ On écrit le nombre $\frac{1,2}{4}$ avec le dénominateur 20.

$6 > 5,7$ ⟶ On compare les numérateurs.

d'où $\frac{6}{20} > \frac{5,7}{20}$ ⟶ On range les expressions fractionnaires dans le même ordre que leurs numérateurs.

Donc $\frac{1,2}{4} > \frac{5,7}{20}$ ⟶ On conclut.

EXERCICES n° 10 p 33 / n° 11 p 33 / n° 13 p 34 / n° 16 p 34 / n° 17 p 34

II. Utiliser le produit en croix

Propriété :

- Si deux nombres en écriture fractionnaire sont égaux alors leurs produits en croix sont égaux.
- Réciproquement, si les produits en croix de deux nombres en écriture fractionnaire sont égaux alors ces deux nombres sont égaux.

Remarque : En particulier, pour démontrer que deux nombres en écriture fractionnaire ne sont pas égaux, il suffit de démontrer que leurs produits en croix ne sont pas égaux.

Exemple : Les nombres $\frac{2,1}{3,5}$ et $\frac{4,1}{6,9}$ sont-ils égaux ? Justifie.

$2,1 \times 6,9 = 14,49$
$3,5 \times 4,1 = 14,35$ ⟶ On calcule les produits en croix et on les compare.

$14,49 \neq 14,35$ ⟶ Les produits en croix ne sont pas égaux donc les nombres ne sont pas égaux.

EXERCICES n° 7 p 33 / n° 8 p 33

III. Additionner et soustraire

Propriété : Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire :

- on écrit les nombres avec le même dénominateur.
- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

Exemples : •

$$\frac{14}{9}+\frac{5}{9}=\frac{14+5}{9}=\frac{19}{9}$$

$$\frac{47}{7}-\frac{5}{7}=\frac{47-5}{7}=\frac{42}{7}=6$$

• Calcule l'expression $A = \frac{7}{3}+\frac{6}{12}$

$A = \frac{7}{3} + \frac{6}{12}$

$A = \frac{7\times4}{3\times4} + \frac{6}{12}$ → On écrit les fractions avec le même dénominateur 12.

$A = \frac{28}{12} + \frac{6}{12}$

$A = \frac{34}{12}$ → On additionne les numérateurs.

$A = \frac{17}{6}$ → On simplifie la fraction lorsque c'est possible.

EXERCICES n° 23 p 35 / n° 24 p 35 / n° 26 p 35 / n° 27 p 35 / n° 29 p 35

IV. Multiplier

1. Multiplications

Propriété : **Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire**, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

⚠ Avant d'effectuer les multiplications, il faut essayer de décomposer les nombres afin de simplifier les calculs !!

Exemples : Calculer $D = \frac{8}{7}\times\frac{5}{3}$

$D = \frac{8}{7} \times \frac{5}{3}$

$D = \frac{8\times5}{7\times3}$ → On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$D = \frac{40}{21}$ → On effectue les calculs.

Calculer l'expression E = $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$

$E = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$

$E = \frac{3 \times 2}{4 \times 5}$ → On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$E = \frac{3 \times 2}{2 \times 2 \times 5}$ → On simplifie la fraction.

$E = \frac{3}{10}$ → On donne le résultat sous forme d'une fraction simplifiée.

En commençant par simplifier, calcule l'expression F = $\frac{4}{15} \times \frac{25}{16}$

$F = \frac{4}{15} \times \frac{25}{16}$

$F = \frac{4 \times 25}{15 \times 16}$ → On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$F = \frac{4 \times 5 \times 5}{3 \times 5 \times 4 \times 4}$ → On remarque que 16 est un multiple de 4 et que 25 et 15 sont des multiples de 5. On décompose 16, 25 et 15 en produits de facteurs.

$F = \frac{5}{3 \times 4}$ → On simplifie par les facteurs 4 et 5.

$F = \frac{5}{12}$ → On effectue les calculs restants.

EXERCICES n° 30 p 36 / n° 31 p 36 / n° 32 p 36 / n° 35 p 36

2. Prendre une fraction d'une quantité

Propriété : **Prendre une fraction d'un nombre** (fractionnaire ou non) revient à multiplier cette fraction par ce nombre.

Exemple : Calcule les $\frac{2}{3}$ de 270 :

$\frac{2}{3} \times 270$ → On multiplie la fraction $\frac{2}{3}$ par la quantité 270.

$= \frac{2 \times 90 \times 3}{3}$ → On effectue les calculs.

$= 2 \times 90 = 180$ → On effectue le quotient ou on simplifie la fraction.

EXERCICES n° 37 p 36 / n° 38 p 36

V. Diviser

1. Inverse

Définition : Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal a 1.

Tout nombre x non nul admet un inverse (note $x^{(-1)}$) qui est le nombre $\frac{1}{x}$.

Tout nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) admet un inverse qui est le nombre $\frac{b}{a}$.

Remarques :

- 0 est le seul nombre qui n'admet pas d'inverse.
- Un nombre et son inverse ont toujours le même signe.
- L'inverse de l'inverse d'un nombre est ce nombre lui-même.

Exemple : Donne les inverses des nombres 3 et $\frac{-7}{3}$

L'inverse de 3 est $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

L'inverse de $\frac{-7}{3}$ est $\frac{1}{\frac{-7}{3}} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7}$

EXERCICES n° 39 p 37 / n° 40 p 37

2. Division

Propriété : Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.

Exemple : Calcule $A = \frac{-8}{7} \div \frac{5}{-3}$ et donne le résultat en simplifiant le plus possible.

$A = +\left(\frac{8}{7} \div \frac{5}{3}\right)$	$\longrightarrow$	On s'occupe d'abord du signe : le résultat est positif car il y a un nombre pair de facteurs négatifs.
$A = \frac{8}{7} \times \frac{3}{5}$	$\longrightarrow$	On multiplie par l'inverse de la deuxième fraction.
$A = \frac{8 \times 3}{7 \times 5} = \frac{24}{35}$	$\longrightarrow$	On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux en simplifiant si possible.

Remarque : La division de l'exemple précédent peut s'écrire aussi $\frac{\frac{-8}{7}}{\frac{5}{-3}}$.

EXERCICES n° 44 p 37 / n° 45 p 37 / n° 46 p 37

<u>EXERCICES BILAN :</u> *n° 48 p 38 / n° 50 p 38 / n° 54 p 38 / n° 59 p 39*