

-----> **Activité fonctions particulières**

**Objectifs :**

- Je sais déterminer une fonction linéaire à partir de son graphique
- Je sais utiliser la proportionnalité pour déterminer des fonctions linéaires
- Je sais déterminer une fonction affine à partir de son graphique
- Je connais le vocabulaire sur les fonctions affines ainsi que sa signification

## I. Fonctions linéaires

### 1. Définition

**Définition :**

Soit  $a$  un nombre réel fixé.

La fonction qui à un nombre  $x$  fait correspondre le nombre  $a x$  est appelée fonction **linéaire** de coefficient  $a$ .

On la note  $f : x \mapsto a x$  ou  $f(x) = a x$ .

**Exemple :**

La fonction qui à un nombre  $x$  associe son triple est une fonction linéaire de coefficient 3.

On la note  $f : x \mapsto 3 x$  ou  $f(x) = 3 x$ .

La fonction  $h : x \mapsto 5 x^3$  n'est pas une fonction linéaire car 5 n'est pas multiplié par  $x$  mais par  $x^3$ .

**Remarque :** L'image de  $x$  par la fonction  $f$  est le nombre  $a x$ .

### 2. Lien avec la proportionnalité

**Propriété : (admise)**

**Une situation de proportionnalité peut toujours se traduire mathématiquement par une fonction linéaire.**

**Exemple :**

On considère un carré de côté  $c$ .

Son périmètre est proportionnel à  $c$  ;  $c$  est une fonction linéaire de coefficient 4.

On la note  $P(c) = 4c$ .

$c$	1	2	3	4	5
$P(c)$	4	8	12	16	20



**EXERCICES :** (Fonctions linéaires et proportionnalité)

### 3. Représentation graphique

**Propriété :**

La représentation graphique d'une fonction linéaire  $f : x \mapsto a x$  est une droite passant par l'origine du repère.

**Définition :**

$a$  s'appelle le **coefficient directeur** de la droite.

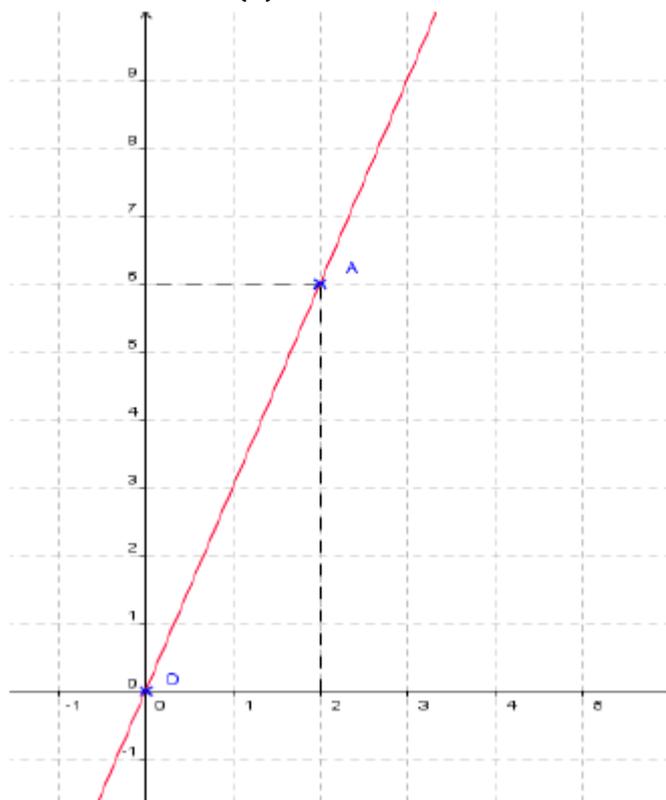
**Exemple :** Représenter graphiquement la fonction linéaire  $f: x \mapsto 3x$ .

$f$  est une fonction linéaire de coefficient 3 donc sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère.

On détermine les coordonnées d'un deuxième point  $A$  de la droite.

Pour cela, on choisit une valeur pour  $x_a$ , par exemple  $x_a = 2$  et on calcule  $y_a = f(x_a) = f(2) = 2 \times 3 = 6$

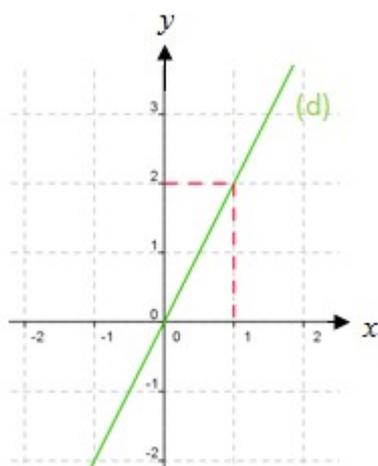
Le point  $A(2; 6)$  appartient donc à la droite  $(d)$ .



**Influence du coefficient directeur :**

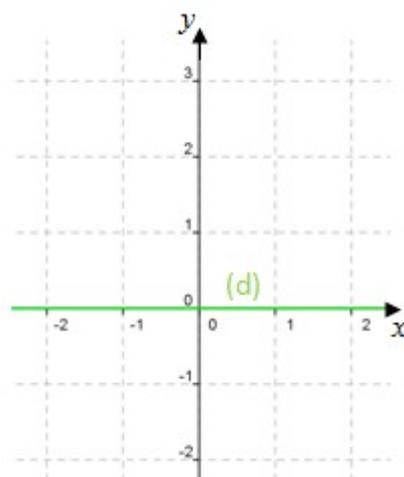
$a > 0$

par exemple  $a = 2$



la droite  $(d)$  « monte »

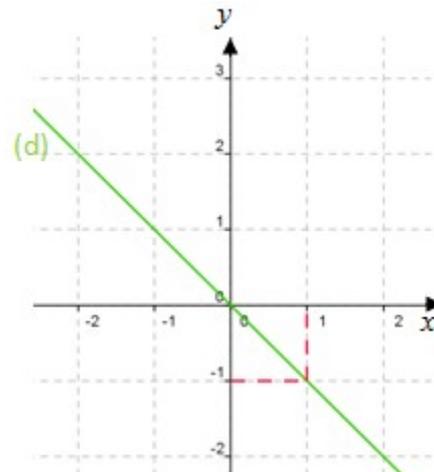
$a = 0$



la droite  $(d)$  est confondu avec l'axe de abscisses

$a < 0$

par exemple  $a = -1$



la droite  $(d)$  « descend »

**EXERCICES :** (Fonctions linéaires et représentation graphique)

## II. Fonctions affines

### 1. Définition

#### Définition :

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres fixés.

La fonction qui à un nombre  $x$  fait correspondre le nombre  $ax + b$  est appelée fonction **affine**.

On la note  $f : x \mapsto ax + b$ , ou  $f(x) = ax + b$ .

#### Exemple :

La fonction qui à un nombre  $x$  associe son double augmenté de 7 est une fonction affine.

On la note  $f : x \mapsto 2x + 7$  ou  $f(x) = 2x + 7$ .

La fonction  $h : x \mapsto 5x^2 + 7$  n'est pas une fonction affine car 5 n'est pas multiplié par  $x$  mais par  $x^2$ .

#### Remarques :

1) Toutes les fonctions linéaires sont des fonctions affines (cas particuliers où  $b = 0 : f(x) = ax = ax + 0$ ).

2) Toutes les fonctions constantes sont des fonctions affines (cas particuliers où  $a = 0 : f(x) = b = 0x + b$ ).

*EXERCICES : (Fonctions affines)*

### 2. Représentation graphique

#### Propriété :

La représentation graphique d'une fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$  est une droite.

#### Définitions :

Soit  $(d)$  la droite représentant graphiquement, dans un repère, la fonction affine  $f$  définie par  $f(x) = ax + b$ . On dit que :

- $y = ax + b$  est une **équation** de la droite  $(d)$
- $a$  est le **coefficient directeur** de la droite  $(d)$
- $b$  est l'**ordonnée à l'origine** de la droite  $(d)$ .

#### Exemple :

Soit  $f$  la fonction affine définie par  $f(x) = 5x + 3$ . Dans un repère, sa représentation graphique est la droite  $(d)$  d'équation  $y = 5x + 3$ .

- On considère le point  $D(2 ; 13)$ .

$5x_D + 3 = 5 \times 2 + 3 = 13 = y_D$  donc le point  $D$  appartient à la droite  $(d)$ .

- On considère le point  $E(5 ; 27)$ .

$5x_E + 3 = 5 \times 5 + 3 = 25 + 3 = 28 \neq y_E$  donc le point  $E$  n'appartient pas à la droite  $(d)$ .

#### Remarque :

Le point de coordonnées  $(0 ; b)$  appartient à la droite représentant graphiquement la fonction affine  $f$  définie par  $f(x) = ax + b$  (car  $a \times 0 + b = b$ ), c'est-à-dire  $b$  est l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe des ordonnées (d'où son appellation).

*EXERCICES : (Fonctions affines avec vocabulaire)*

### Exemple de représentation graphique :

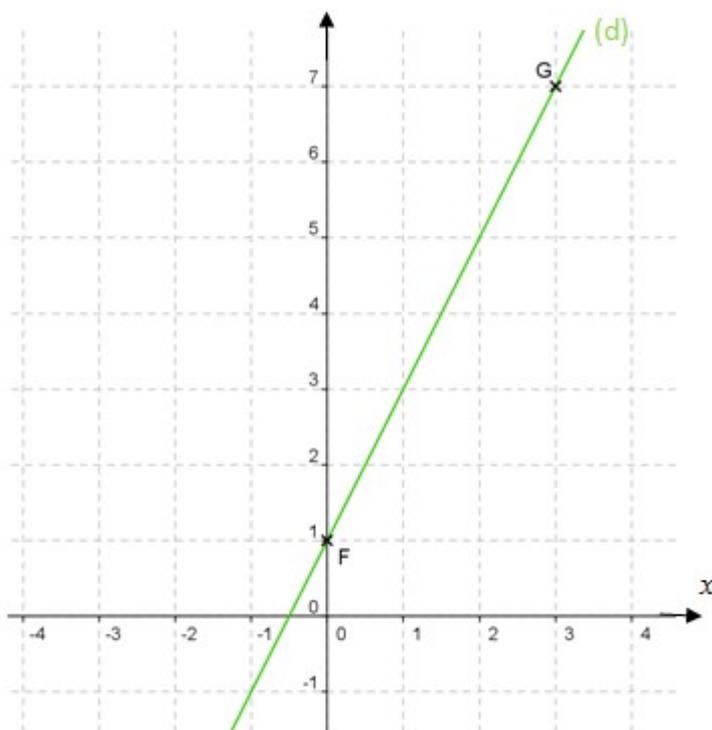
Soit  $h$  la fonction affine définie par  $h(x) = 2x + 1$ .

Dans un repère, sa représentation graphique est la droite (d) d'équation  $y = 2x + 1$ .

Le point  $F(0 ; 1)$  appartient à la droite (d).

Pour  $x = 3$ ,  $y = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$  donc le point  $G(3 ; 7)$  appartient également à la droite (d).

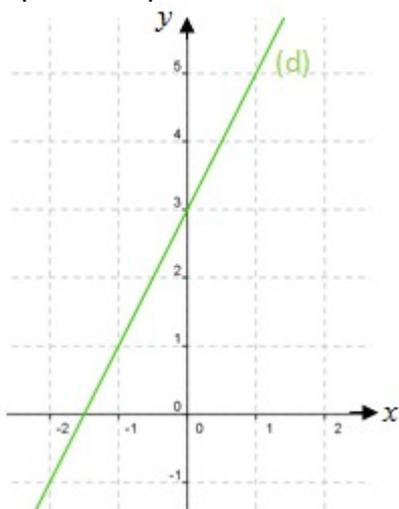
$$y = h(x)$$



### Influence du coefficient directeur :

$$a > 0$$

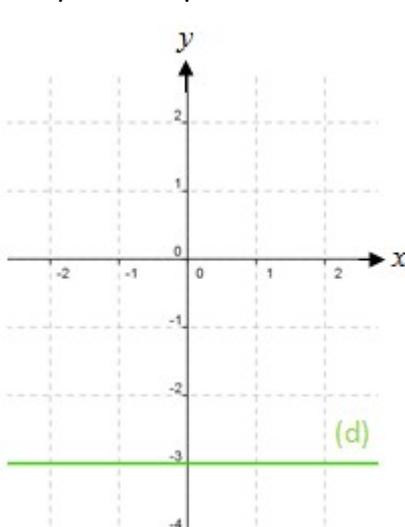
par exemple  $a = 2$  et  $b = 3$



la droite (d) « monte »

$$a = 0$$

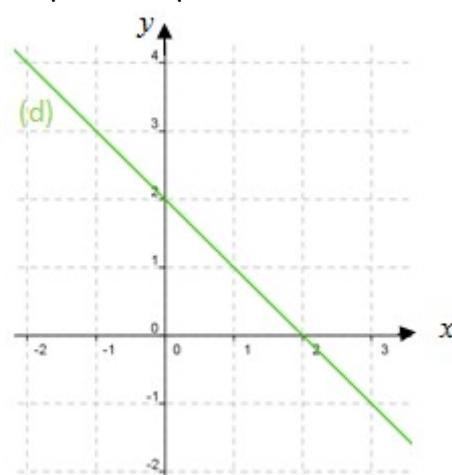
par exemple  $b = -3$



la droite (d) est parallèle avec l'axe de abscisses

$$a < 0$$

par exemple  $a = -1$  et  $b = 2$



la droite (d) « descend »

EXERCICES : (Fonctions affines et représentation graphique)

### 3. Proportionnalité des accroissements

#### Propriété:

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres fixés.

Soit  $f$  la fonction affine définie par  $f(x) = ax + b$ .

Il y a proportionnalité entre les accroissements de  $f(x)$  et les accroissements de  $x$ . Le coefficient de proportionnalité est  $a$ .

En d'autres termes, quels que soient les nombres distincts  $x_1$  et  $x_2$  :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

#### Remarques :

Dans cette propriété, le terme « accroissement » signifie augmentation ou diminution.

Cette propriété permet de calculer le nombre  $a$  connaissant deux nombres et leurs images par la fonction  $f$ .

**Exemple :** Soit  $f$  une fonction affine telle que  $f(3) = 6$  et  $f(5) = 12$ .

$$a = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} \quad a = \frac{12 - 6}{5 - 3} \quad a = \frac{6}{2} \quad a = 3$$

Donc,  $a = 3$ .

Donc  $f(x) = 3x + b$ . On peut calculer  $b$  en se servant d'un point de la droite, par exemple,  $f(3) = 6$

$$f(3) = 3 \times 3 + b = 6$$

donc  $9 + b = 6$  c'est-à-dire  $b = 6 - 9 = -3$ .

$$\text{Donc } f(x) = 3x - 3$$

#### Remarque :

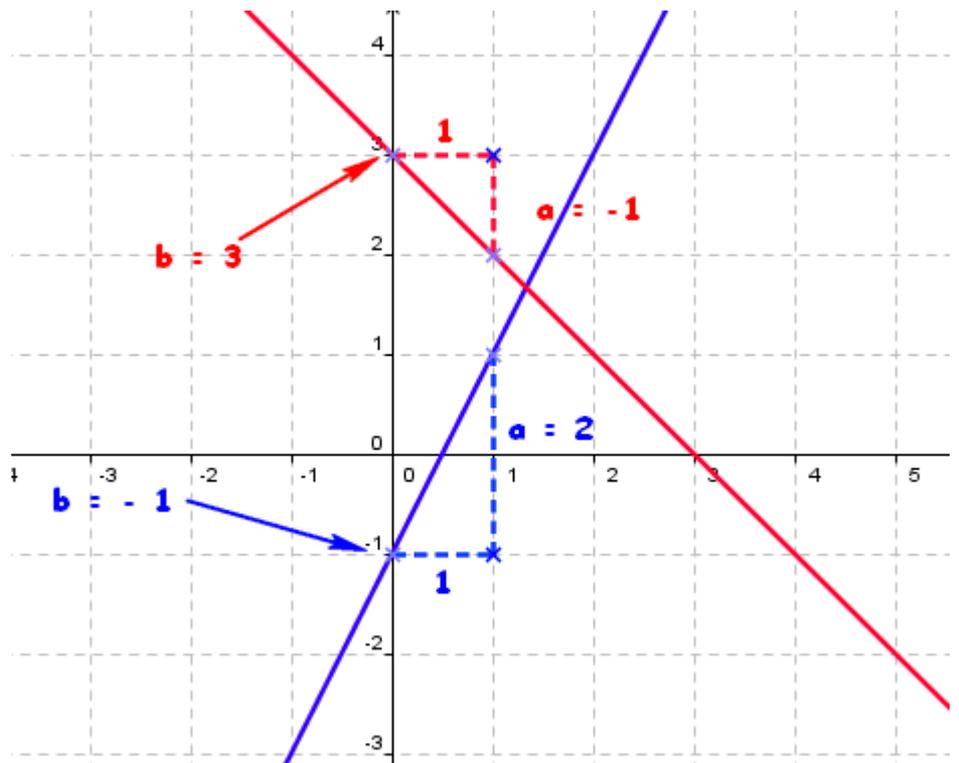
On admettra que si  $x$  augmente de 1,  $f(x)$  augmente de  $a$ . Cela permet de déterminer graphiquement la valeur de  $a$ .

Si  $f$  est la fonction représentative de la droite rouge, on a

$$f(x) = -x + 3$$

Si  $g$  est la fonction représentative de la droite bleue, on a

$$g(x) = 2x - 1$$



**EXERCICES :** (Fonctions affines et accroissement)